



Matemàtiques

Sèrie 2

SOLUCIONS,

CRITERIS DE PUNTUACIÓ

I CORRECCIÓ

INSTRUCCIONS

- Trieu i resolcu CINC dels set exercicis que es proposen.
- Indiqueu clarament quins exercicis heu triat. Si no ho feu així, s'entendrà que heu escollit els cinc primers.
- Cada exercici val 2 punts.

Material necessari

- Material d'ús habitual: bolígraf, llapis, goma, regla, etcètera.
- Compàs i semicercle graduat (transportador).
- Calculadora científica.

Cada aspirant ha de portar el seu material. En cap cas no es permet la cessió de calculadores ni d'altres materials entre les persones aspirants.

1. Digueu si les afirmacions següents són vertaderes o falses:

[2 punts en total: 0,25 punts per apartat]

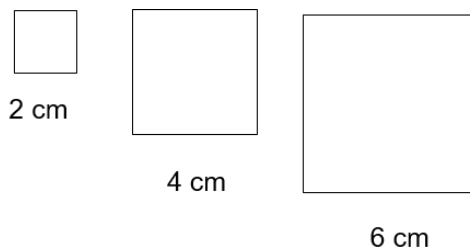
- a) 3 és un nombre racional. **Vertadera**
b) $\sqrt{225}$ és un nombre irracional. **Falsa**
c) -25 és un nombre enter. **Vertadera**
d) $\sqrt{-4}$ no és un nombre real. **Vertadera**
e) 2^{-3} és un nombre enter. **Falsa**
f) $\frac{35}{7}$ és un nombre natural. **Vertadera**
g) $5, \hat{3}$ és un nombre irracional. **Falsa**
h) $\sqrt{7}$ és un nombre irracional. **Vertadera**

2. Realitzeu les operacions següents amb radicals i doneu-ne el resultat amb una sola arrel:

[2 punts en total: 0,5 punts per apartat]

- a) $3\sqrt{5} + \frac{2}{3}\sqrt{5} - \sqrt{5} = \left(3 + \frac{2}{3} - 1\right)\sqrt{5} = \frac{8}{3}\sqrt{5}$
b) $2\sqrt{75} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{12} = 2\sqrt{3 \cdot 5^2} - 3\sqrt{3} + 5\sqrt{2^2 \cdot 3} =$
 $10\sqrt{3} - 3\sqrt{3} + 10\sqrt{3} = 17\sqrt{3}$
c) $\sqrt[5]{12} \cdot \sqrt[5]{7} = \sqrt[5]{12 \cdot 7} = \sqrt[5]{84}$
d) $\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[12]{3^3} \cdot \sqrt[12]{2^4} = \sqrt[12]{3^3 \cdot 2^4} = \sqrt[12]{432}$

3. Considereu la successió dels quadrats, dels quals el primer té un costat de 2 cm i cada quadrat té el costat 2 cm més gran que l'anterior.



a) Trobeu els cinc primers termes de la successió dels perímetres i els cinc primers termes de la successió de les àrees dels quadrats.

[1 punt]

$$P_n = \{8, 16, 24, 32, 40, \dots\}$$

$$A_n = \{4, 16, 36, 64, 100, \dots\}$$

b) Considereu la successió dels costats i la successió dels perímetres. Totes dues són progressions. De quin tipus? Quin és el terme general de cadascuna?

[1 punt]

La successió dels costats i la successió dels perímetres són progressions aritmètiques.

$$C_n = 2n \quad i \quad P(n) = 8n$$

Adjudiqueu 0,25 punts pel tipus de progressions i 0,75 punts pels termes generals.

4. Es vol calcular quin és el valor de la gravetat d'un planeta llunyà, i per fer-ho es llança un objecte en direcció vertical cap amunt. L'altura (h), mesurada en metres, a la qual es troba l'objecte en funció del temps (t), mesurat en segons, ve donada per una funció polinòmica de 2n grau com la següent: $h(t) = at^2 + bt + c$, on c representa l'altura inicial; b , la velocitat que es dona a l'objecte en el moment inicial; i a , la meitat de la gravetat del planeta.

S'ha mesurat l'altura en diferents moments (a l'inici, al cap d'1 segon i al cap de 2 segons), i s'han obtingut els resultats següents: $h(0) = 0$, $h(1) = 7$ i $h(2) = 8$. Amb aquestes dades, trobeu els valors dels paràmetres a , b i c .

[2 punts]

$$h(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 0 \quad c = 0$$

$$h(1) = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 = a + b = 7 \quad h(2) = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 = 4a + 2b = 8$$

$$\begin{cases} a + b = 7 \\ 2a + b = 4 \end{cases} \quad a = -3 \quad b = 10$$

Adjudiqueu 0,75 punts pel paràmetre a , 0,75 punts pel paràmetre b i 0,5 punts pel paràmetre c .

5. Resoleu les qüestions següents:

a) Considereu els punts $A(-6, 3)$ i $B(-5, 15)$. Trobeu els components del vector \overrightarrow{AB} i la distància que separa tots dos punts.

[1 punt]

$$\overrightarrow{AB} = (-5 - (-6), 15 - 3) = (1, 12)$$

$$d(A, B) = \sqrt{1^2 + 12^2} = \sqrt{145}$$

Adjudiqueu 0,5 punts pels components del vector i 0,5 punts per la distància.

b) Trobeu també l'equació de la recta que passa per aquests dos punts en forma contínua i explícita.

[1 punt]

Vector director: $\vec{v} = \overrightarrow{AB} = (1, 12)$ **Punt pel que passa:** $A(-6, 3)$ o $B(-5, 15)$

Equació contínua: $\frac{x+6}{1} = \frac{y-3}{12}$ o $\frac{x+5}{1} = \frac{y-15}{12}$

Equació explícita: $y = 12x + 75$

Adjudiqueu 0,5 punts per l'equació contínua i 0,5 punts per l'equació explícita.

6. Considereu la funció $f(x) = x(x^2 - 12)$ i trobeu:

a) Els punts de tall amb els eixos.

[0,5 punts]

Eix x: $x(x^2 - 12) = 0 \quad x_1 = 0 \quad x^2 - 12 = 0 \quad x^2 = 12 \quad x_{2,3} = \pm\sqrt{12}$

Eix y: $f(0) = 0 \quad y = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

[0,25 punts]

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

c) El màxim i el mínim relatiu.

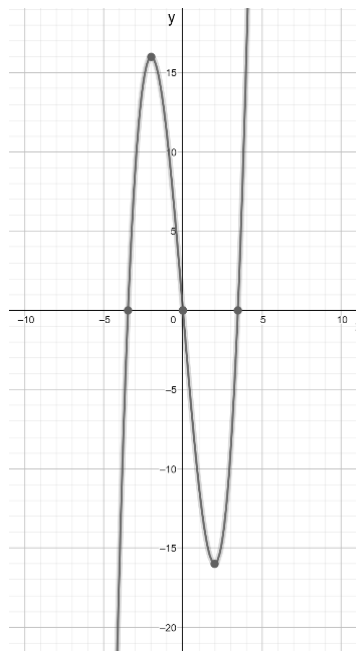
[0,75 punts]

$$f(x) = x^3 - 12x \quad f'(x) = 3x^2 - 12 \quad 3x^2 - 12 = 0 \quad x^2 = 4 \quad x_{1,2} = \pm 2$$

$$f''(x) = 6x \quad f''(2) = 12 \quad \text{mínim a } (2, -16) \quad f''(-2) = -12 \quad \text{màxim a } (-2, 16)$$

d) Amb les dades que acabeu de trobar, feu un esbós de la gràfica de la funció.

[0,5 punts]



7. En una població de flamencs s'ha detectat una mortaldat superior a la normal, i per això se n'ha fet un estudi en una mostra de 80 exemplars, amb 50 femelles i 30 mascles. En el 15 % de les femelles i en el 20% dels mascles s'ha detectat un virus que podria ser el causant de l'augment de la mortalitat.

a) Trobeu la probabilitat que, en agafar un exemplar a l'atzar, sigui femella i la probabilitat que sigui mascle.

[0,5 punts]

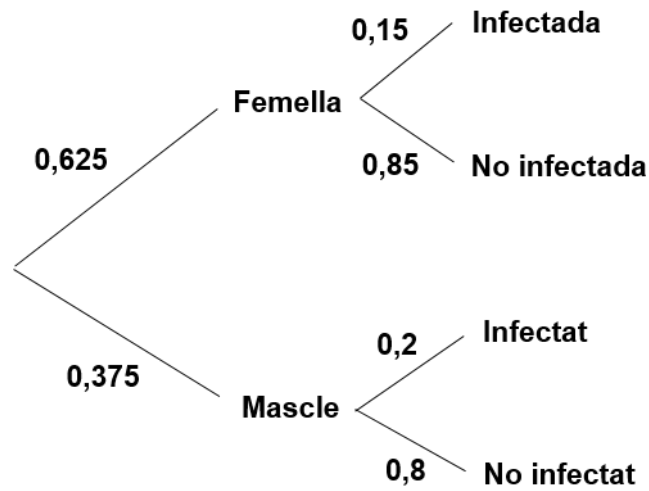
$$P(\text{Femella}) = \frac{50}{80} = 0,625 \quad P(\text{Mascle}) = \frac{30}{80} = 0,375$$

b) Feu un diagrama d'arbre i indiqueu-hi les probabilitats de cada branca per trobar les probabilitats següents quan agafem un exemplar a l'atzar.

[1,5 punts en total: 1 punt pel diagrama i 0,25 punts per cadascuna de la probabilitats]

b1) Que sigui mascle i infectat pel virus.

b2) Que sigui femella i no infectada pel virus.



$$P(\text{mascle i infectat}) = 0,375 \cdot 0,2 = 0,075$$

$$P(\text{femella i no infectada}) = 0,625 \cdot 0,85 = 0,531$$